

**ТУНГУШБАЕВА ИНДИРА ОРАЗБЕКОВНА**

**«ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АЛГЕБР,  
ТЕОРИИ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ЙОНСОНОВСКИМИ»**

**АННОТАЦИЯ**

**диссертации, представленной на соискание степени доктора  
философии (PhD) по образовательной программе  
8D05401-«Математика»**

**Актуальность темы.** Данная диссертационная работа представлена как результат научного исследования, относящегося к одному из современных направлений фундаментальной математики – теории моделей. Теория моделей – раздел математики, возникший в результате комбинирования методов абстрактной алгебры, универсальной алгебры, математической логики, алгебраической геометрии и топологии. Основными предметами исследования теории моделей служат формальные языки и их модели. Основной задачей теории моделей является описание фундаментальных взаимосвязей между синтаксисом и семантикой рассматриваемого формального языка (в нашем случае это язык первого порядка исчисления предикатов).

Традиционно в теории моделей сложилось два направления, которые условно были названы «восточным» и «западным». Такие названия связаны с географическим расположением проживания основоположников теории моделей, а именно Альфреда Тарского и Абрахама Робинсона. Как хорошо известно, А. Тарский проживал на западном побережье Соединённых Штатов Америки, тогда как А. Робинсон – на восточном. Исследования, базирующиеся на применении методов «западной» теории моделей, как правило, связаны с вопросами математического анализа и алгебраической геометрии и предполагают полноту используемого языка, тогда как аппарат «восточной» теории моделей развивался исходя из постановок актуальных проблем универсальной алгебры, а также различных подразделов абстрактной алгебры. Данное диссертационное исследование относится к «восточному» направлению теории моделей и связано с исследованием неполных теорий, а именно класса йонсоновских теорий.

Йонсоновские теории представляют собой особый подкласс класса индуктивных теорий, для которого выполняются следующие теоретико-модельные свойства: существование бесконечных моделей, свойство амальгамирования и свойство совместного вложения. При этом заметим, что, согласно определению, йонсоновские теории, вообще говоря, не являются полными. Учитывая тот факт, что класс неполных теорий гораздо более обширен по сравнению с классом полных теорий, становится очевидным, что изучение неполных теорий и классов их моделей представляет собой более сложную и весьма актуальную задачу. Однако, в силу отсутствия свойства элементарной эквивалентности между моделями неполных теорий и ряда

других теоретико-модельных свойств, такая постановка задачи представляется неподъёмной, и именно поэтому в качестве предмета исследования был выделен класс индуктивных теорий, в рамках которого мы сосредоточили своё внимание на изучении йонсоновских теорий. К классу йонсоновских теорий относятся такие теории, как теория групп, теория абелевых групп, теория полей фиксированной характеристики, теория линейных порядков и многие другие. Перечисленные теории являются неполными, однако существуют также примеры и полных йонсоновских теорий: теория делимых абелевых групп, теория алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики, теория плотных линейных порядков без конечных элементов и так далее. Таким образом, выбранный нами класс не только представлен достаточным количеством классических примеров, но и является весьма разнообразным, а потому интересным для проведения теоретико-модельных исследований.

В настоящей работе представлены новые инструменты для изучения йонсоновских теорий – как семантического, так и синтаксического характера. При этом диссертационное исследование проводилось по двум направлениям.

Первое направление берёт своё начало в изучении классических алгебраических структур дифференциальной алгебры с позиции исследования йонсоновских теорий. В первую очередь приводятся новые примеры йонсоновских теорий, а именно теория  $DF_0$  дифференциальных полей характеристики 0, теория  $DCF_0$  дифференциально замкнутых полей характеристики 0, теория  $DPF_p$  дифференциально совершенных полей характеристики  $p$ , теория  $DCF_p$  дифференциально замкнутых полей характеристики  $p$ . При этом замечено, что теория  $DF_p$  дифференциальных полей характеристики  $p$  не является йонсоновской. Причиной этого является отсутствие свойства амальгамирования у данной теории, и данный факт представляет интерес в контексте изучения свойств амальгамирования и совместного вложения и их связи между собой. В ходе дальнейшего исследования наше внимание привлекла связь между этими свойствами и в классах моделей теорий  $DF_0$  и  $DPF_p$ . В целях обобщения результатов, полученных в ходе изучения вышеуказанных свойств данных теорий были определены особые подклассы индуктивных теорий относительно теоретико-модельной связи между свойствами амальгамирования и совместного вложения, построены различные примеры, а также приведены некоторые достаточные условия, описывающие эту связь.

Второе направление работы имеет отношение к расширению аппарата изучения йонсоновских теорий в контексте применения так называемого семантического метода, впервые появившегося в работах Мустафина Т.Г. Данный метод заключается в исследовании свойств йонсоновских теорий путём характеристики семантических моделей этих теорий и, как правило, подразумевает построение йонсоновского спектра для некоторого заданного класса структур счётного языка первого порядка. Дальнейшее применение данного метода для изучения свойств многих конкретных йонсоновских

теорий и классов их моделей развивалось в трудах Ешкеева А.Р. В целях совершенствования и расширения инструментария изучения йонсоновских теорий Ешкеевым А.Р. было введено множество новых определений, в числе которых и определение йонсоновского спектра. Понятие йонсоновского спектра является основным инструментом семантического метода, а потому получение различных результатов, позволяющих описать йонсоновский спектр фиксированного класса структур, имеет большое значение в дальнейшем формировании и совершенствовании аппарата изучения йонсоновских теорий и их классов моделей. В диссертационной работе демонстрируется применение семантического метода в исследовании свойств классов косемантической йонсоновских теорий йонсоновского спектра для фиксированного класса структур рассматриваемого языка, а также приведены результаты относительно построения некоторых типов алгебраических структур на йонсоновском спектре и классах косемантической данного спектра.

Исходя из вышеизложенного, можно заключить, что изучение йонсоновских теорий остается актуальным в свете современных достижений теории моделей, благодаря чему формируются новые методы исследования как полных, так и неполных теорий, и совершенствуется имеющийся математический исследовательский аппарат.

**Цель работы.** Целью данного диссертационного исследования является изучение теоретико-модельных свойств фиксированных теорий относительно априори определённых логических взаимоотношений между основополагающими понятиями, задающими рассматриваемые в диссертации йонсоновские теории. К ним относятся следующие свойства: совместного вложения, амальгамирования, аксиоматизации, полноты, категоричности, совершенности, выпуклости, алгебраизации классов косемантической рассматриваемого йонсоновского спектра и различных взаимосвязей этих классов.

**Задачи исследования.** В рамках проведения диссертационного исследования были поставлены следующие задачи:

1. Найти новые примеры йонсоновских теорий среди классических структур дифференциальной алгебры и показать их совершенность;
2. Получить достаточное условие йонсоновости для полных теорий относительно свойства категоричности и свойств класса экзистенциально замкнутых моделей;
3. Для рассматриваемой теории  $T$  получить достаточные условия того, что  $T$  является AP-теорией;
4. Описать структуру робинсоновского спектра произвольного класса  $L$ -структур;
5. Найти достаточное условие конечности класса косемантической фиксированной йонсоновской теории;
6. Показать связь класса экзистенциально аксиоматизируемых теорий с классом йонсоновских теорий с использованием техники семантического метода;

7. Описать алгебраическую структуру йонсоновского спектра и классов косемантичности йонсоновского спектра фиксированного класса  $L$ -структур.

**Объект исследования.** Основным объектом исследования данной диссертации являются фиксированные йонсоновские теории и их классы моделей.

**Предмет исследования.** В данной диссертации исследуются теоретико-модельные свойства йонсоновских теорий и их классов моделей, в том числе рассматриваемые формулы этих теорий относительно их моделей.

**Методика исследования.** Основными методами, используемыми в ходе данного диссертационного исследования, являются как классические методы математической логики и универсальной алгебры, так и современные методы, применяемые специализированно в контексте изучения йонсоновских теорий.

Под классическими методами математической логики подразумевается использование технического синтаксического аппарата исчисления предикатов логики первого порядка; к методам универсальной алгебры мы относим прежде всего семантический подход к изучению различных алгебраических структур, таких, как группы, абелевы группы, кольца, поля, решётки.

Что касается методики, используемой для исследования йонсоновских теорий, мы выделяем метод переноса свойств полных теорий на случай неполных теорий, а также семантический метод. Оба данных метода были предложены Ешкеевым А.Р.

В силу того, что йонсоновские теории в общем случае не полны, инструментарий для их изучения несколько ограничен, и поэтому подбор подходящих методов, применяемых, как правило, при изучении полных теорий, для получения результатов относительно йонсоновских теорий не просто имеет смысл, но и вполне оправдан тем фактом, что центр йонсоновской теории является полной теорией, что позволяет перенести некоторые важные теоретико-модельные свойства центра на саму теорию.

Суть семантического метода заключается в изучении свойств семантической модели как семантического инварианта заданной йонсоновской теории, что даёт возможность охарактеризовать как семантически, так и синтаксически не только данную теорию, но и целый класс теорий, косемантичных ей. Как было упомянуто выше, основным инструментом семантического метода является понятие йонсоновского спектра класса структур фиксированного языка. Базовый алгоритм применения семантического метода, как правило, строится на следующих шагах: выполняется подбор подходящего класса структур заданного языка первого порядка; для данного класса структур строится йонсоновский спектр, частным случаем которого может также и быть робинсоновский спектр; на построенном йонсоновском спектре вводится отношение косемантичности йонсоновских теорий; выбирается произвольный класс косемантичности либо класс косемантичности, удовлетворяющий некоторым заданным условиям; через описание свойств семантической модели данного класса косемантичности изучаются свойства теорий этого класса. В данной работе не

только демонстрируется применение семантического метода, но и приводятся результаты, позволяющие усилить его арсенал и расширить возможности для получения новых потенциальных теоретико-модельных результатов.

**Основные положения, выносимые на защиту.** На защиту представляются следующие основные результаты диссертационного исследования:

1. Теории  $DF_0, DCF_0, DPF_p, DCF_p$  – совершенные йонсоновские теории.  
2. Пусть  $T$  – полная  $\omega$ -категоричная теория, класс экзистенциально замкнутых моделей которых не пуст. Тогда  $T$  – совершенная йонсоновская теория.

3. Пусть  $L$ -теория  $T$  является сильно выпуклой и пусть  $T$  допускает свойство амальгамирования. Тогда  $T$  является AP-теорией.

4. Пусть  $T$  – робинсоновская теория, а  $T'$  – йонсоновская теория, косемантическая  $T$ . Тогда  $T \subseteq T'$ .

5. Пусть  $K$  – произвольный класс  $L$ -структур (возможно, содержащий только одну структуру),  $RSp(K)_{/\simeq}$  – фактор-множество робинсоновского спектра  $K$  по отношению косемантической. Тогда каждый класс косемантической  $[Δ]$  содержит ровно одну теорию. Другими словами, для любых двух робинсоновских теорий  $T$  и  $T'$  языка  $L$  отношение косемантической эквивалентно равенству теорий, т.е.  $T \simeq T' \Leftrightarrow T = T'$ .

6. Пусть  $T$  – йонсоновская теория, и  $T^0 = Th_{\forall\exists}(C_{[T]})$  – конечно аксиоматизируемая теория. Тогда число теорий, косемантических  $T$ , конечно.

7. Любая экзистенциально аксиоматизируемая теория является йонсоновской теорией, косемантической пустой теории.

8. Пусть  $T_1, T_2$  – йонсоновские теории языка  $L$ , такие, что множество предложений  $T_1 \cup T_2$  непротиворечиво и найдётся хотя бы одна модель  $M \in Mod(T_1 \cup T_2)$ ,  $M \in E_\sigma$ , бесконечной мощности. Тогда  $T_1 \cup T_2$  – йонсоновская теория

9. Пусть  $L$  – язык первого порядка, и пусть  $K$  – фиксированный класс  $L$ -структур, такой, что в  $K$  содержится хотя бы одна бесконечная  $L$ -структура  $M \in E_\sigma$ ,  $JSp(K)$  – йонсоновский спектр  $K$ . Тогда  $(JSp(K), \cup)$  является коммутативным моноидом.

10. Для любого класса косемантической  $[T] \in JSp(K)_{/\simeq}$ , где  $K$  – класс  $L$ -структур, содержащий хотя бы одну бесконечную структуру,  $[T]$  представляет собой решетку относительно операций " $\vee$ " и " $\wedge$ ".

**Описание основных результатов исследования.** Результаты проведённого исследования представлены в 2 главах диссертации. Глава 1 «Необходимые элементы из курса алгебры и связанной с ними теории моделей» состоит из 5 параграфов и представляет изложение теоретических сведений, необходимых для понимания содержания данной работы. В параграфе 1.1 приведены сведения о классических алгебраических структурах, имеющих отношения к данному исследованию. В параграфе 1.2 приводятся определения понятий и освещаются известные результаты из курса классической теории моделей. Параграфы 1.3-1.5 представляют собой

теоретико-модельное описание некоторых дифференциальных алгебр, также касающихся данной диссертационной работы.

Глава 2 «Йонсоновские теории», состоящая из 6 параграфов, посвящена изучению йонсоновских теорий и содержит необходимую информацию о данном классе теорий, а также представляет полученные в ходе проведения диссертационного исследования результаты. Параграф 2.1 излагает основные сведения о йонсоновских теориях с позиции как классической, так и современной теории моделей. В параграфах 2.2-2.3 представлены результаты о дифференциальных полях, полученные в ходе данного диссертационного исследования, а также описаны некоторые свойства подклассов йонсоновских теорий с позиции изучения свойств амальгамирования и совместного вложения, к которым относятся упомянутые дифференциальные алгебры. Параграфы 2.4-2.6 представлены как результат исследования классов косемантичности йонсоновских теорий и алгебраической структуры йонсоновского спектра в целях расширения арсенала семантического метода для дальнейшего изучения йонсоновских и индуктивных теорий и их классов моделей.

**Обоснование новизны и важности полученных результатов.** В ходе проведения диссертационного исследования в целях изучения теоретико-модельных свойств фиксированных йонсоновских теорий были определены следующие понятия: AP-теория, JEP-теория, AJ-теория. Данные понятия являются новыми, не предлагались ранее другими авторами, однако при этом показали свою необходимость и полезность в расширении инструментария для исследования не только йонсоновских теорий, но теорий рассматриваемого языка в целом. Также все результаты, полученные в рамках данного диссертационного исследования, представляют собой теоремы, не публиковавшиеся ранее в работах иных авторов, и демонстрируют новый, свежий подход в развитии аппарата теории моделей и смежных областей.

Представленная диссертационная работа относится к исследованиям из области фундаментальной математики и потому носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при проведении исследований, связанных с различными направлениями теории моделей, математической логикой, универсальной алгеброй и другими смежными дисциплинами.

**Апробация полученных результатов.** Результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, были представлены и апробированы на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Алматы, 4-9 апреля 2022 г.),
2. IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры» (Актобе, 24-28 мая 2022 г.),
3. Международная научная конференция «Актуальные задачи математики, механики и информатики»: посвященная 80-летию профессора Т.Г. Мустафина (Караганда, 8-9 сентября 2022 г.),

4. Труды международной научной конференции «Математическая логика и компьютерные науки» (Астана, 7-8 октября 2022 г.),
5. VII Franco-Kazakh Colloquium in Model Theory. Abstracts. Claude Bernard Lyon 1 University, Camille Jordan Institute (Lyon, November 14-18, 2022),
6. Международная научно-практическая конференция «Таймановские чтения – 2022», посвященная 105-летию доктора физико-математических наук, академика А.Д. Тайманова и 90-летию Западно-Казахстанского университета им. М. Утемисова (Уральск, 30 ноября, 2022 г.),
7. Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Алматы, 5-7 апреля 2023 г.),
8. LOGIC COLLOQUIUM 2023. European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. University of Milan (Italy, 5–9 June 2023),
9. XIII International Conference of the Georgian Mathematical Union. Batumi Shota Rustaveli State University (Georgia, 4–9 September),
10. VII World Congress of Turkic World (TWMS Congress-2023) (Turkistan, September 20-23),
11. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (16-19 апреля 2024 г., ИМММ, КазНПУ им. Абая Кунанбаева, г. Алматы, Международный математический Центр СО РАН, г. Новосибирск),
12. Международная научная конференция студентов и молодых учёных «Gulum jane Bilim» (14 апреля 2024 г., ЕНУ им. Л.Н. Гумилёва, г. Астана),
13. Международная научная конференция «Математика в созвездии наук», посвящённая 85-летию со дня рождения академика РАН В.А. Сидоровича (1-2 апреля 2024 г., КФ МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Астана),
14. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2024 (19-20 апреля 2024 г., КФ МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Астана),
15. Международная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (26 июня-2 июля 2024 г., г. Казань),
16. XVI международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (8-13 июля 2024 г., ИМ СО РАН, г. Новосибирск),
17. Объединённый семинар «Теория моделей» им. Е.А. Палютина (25 мая 2022 г. и 3 мая 2023 г., Институт математика СО РАН, г. Новосибирск, ИМММ, г. Алматы).
18. Традиционная международная конференция «Мальцевские чтения» (11-15 ноября 2024 г., ИМ СО РАН, г. Новосибирск).

Также результаты диссертационного исследования регулярно представлялись в докладах на семинаре «Теория моделей» кафедры алгебры, математической логики и геометрии им. профессора Т.Г. Мустафина Карагандинского университета им. академика Е.А. Букетова.

**Соответствие направлениям развития науки или государственным программам.** Диссертационная работа выполнена в рамках следующих двух проектов, финансируемых из государственного бюджета: «Классы

косемантичности и их классы моделей», ИРН АР09260237 (срок реализации: 2021-2023 гг.), «Фрагменты определимых подмножеств семантической модели фиксированной йонсоновской теории», ИРН АР23489523 (срок реализации: 2024-2026 гг.). Тема диссертационного исследования соответствует приоритетному направлению «Интеллектуальный потенциал страны» по направлению науки «Естественные науки», специализированному научному направлению «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики, механики, астрономии, физики, химии, биологии, информатики и географии».

**Публикации.** Все результаты диссертационной работы опубликованы в 25 научных работах, среди которых

– 5 статей, опубликованы в журналах, входящих в базу Scopus с процентилем не ниже 35.

– 20 тезисов докладов, опубликованных в трудах международных и зарубежных конференций.

**Описание вклада докторанта в подготовку каждой публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах. Вклад докторанта состоит в анализе используемых источников по теме исследования, формулировании результатов и проведении их доказательства.

**Структура и объём диссертации.** Объём представленной диссертации – 82 страницы. Диссертация состоит из введения, 2 глав, заключения и списка использованной литературы.

**Количество использованных источников** – 88.

**Ключевые слова.** Йонсоновская теория, семантическая модель, свойство амальгамирования, свойство совместного вложения, дифференциальное поле, дифференциально замкнутое поле, дифференциально совершенное поле, АР-теория, йонсоновский спектр, косемантичные йонсоновские теории, оболочка Кайзера.